工程數學

Engineering Mathematics

- 第四章：拉普拉斯轉換(Laplace Transform)
  - 拉普拉斯轉換簡介
  - 拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質
  - 導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式
  - 單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)
  - 部分分式，微分方程式
  - 微分方程組

拉普拉斯轉換簡介

- 直接用於解含有初值問題之齊次/非齊次的常係數微分方程式
- 方法：
  - 利用拉普拉斯轉換將原始問題轉換到S空間
  - 代入初始條件
  - 在S空間上以代數方法求得問題解
  - 再利用反拉普拉斯轉換將S空間上的解逆轉換到原始空間，得到解 y

$$10*1000 \Rightarrow \log_{10}(10)+\log_{10}(1000)=4 \Rightarrow 10^4=10000$$

拉普拉斯轉換簡介(續)

$y' - 5y = e^{5x}; y(0) = 2$

$$L\{y' - 5y\} = L\{e^{5x}\} \quad \Rightarrow L\{y'\} - 5L\{y\} = \frac{1}{s-5}$$

$$let\ Y(s) = L\{y\} \Rightarrow sY(s) - y(0) - 5Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$\Rightarrow sY(s) - 2 - 5Y(s) = \frac{1}{s-5} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s-5} + \frac{1}{(s-5)^2}$$

$$故 y = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{\frac{2}{s-5} + \frac{1}{(s-5)^2}\}$$

$$= 2L^{-1}\{\frac{1}{s-5}\} + L^{-1}\{\frac{1}{(s-5)^2}\} = \boxed{2e^{5x}} + \boxed{xe^{5x}}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$F(s)$ 稱爲原函數 $f(t)$ 的

拉普拉斯轉換式(*Laplace transformation*)

一般以$L\{f\}$表示之：

$$F(s)=L\{f\}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$f(t)$ 稱爲 $F(s)$ 的逆轉換式(*Inverse transform*)

並以$L^{-1}\{F\}$表示之：

$$f(t)=L^{-1}\{F\}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

原函數 $f(t)$ 以 t 爲變數,其對應之

拉普拉斯轉換式($Laplace\ transformation$) $F(s)$

以 s 爲變數

例如:$Y(s)$ 代表 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換式

在不混淆狀 況下也可簡單以 Y 代表 y 的拉普拉斯轉換式

令 $f(t)=1$ 試求 $F(s)$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}1dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\{F\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=f(t)=1$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

令 $f(t)=e^{at}$ 試求 $F(s)$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty$$

當 $s>a \Rightarrow -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty=\boxed{\frac{1}{s-a}}$

$$L^{-1}\{F\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=f(t)=e^{at}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

拉普拉斯轉換的線性性質

令 任意函數 $f(t), g(t)$ 及任意常數 c_1, c_2

$$L\{c_1 f(t) \pm c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} \pm c_2 L\{g(t)\}$$

$$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f(t) + c_2 g(t)]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 g(t)dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \quad = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

$$L\{c_1 f(t) \pm c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} \pm c_2 L\{g(t)\}$$

令 $f(t) = \sinh(at)$, 試求 $F(s)$

因 $\sinh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$

$$L\{f(t)\} = L\{\tfrac{1}{2}e^{at} - \tfrac{1}{2}e^{-at}\} = \tfrac{1}{2}L\{e^{at}\} - \tfrac{1}{2}L\{e^{-at}\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+a}{s^2-a^2} - \frac{s-a}{s^2-a^2}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

$$L\{c_1 f(t) \pm c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} \pm c_2 L\{g(t)\}$$

$let\ a = iw$

$$L\{e^{iwt}\} = \frac{1}{s - iw} = \frac{s + iw}{(s - iw)(s + iw)} = \boxed{\frac{s}{s^2 + w^2}} + \boxed{i \frac{w}{s^2 + w^2}}$$

尤拉公式 : $e^{iwt} = \cos(wt) + i\sin(wt)$

$$L\{e^{iwt}\} = L\{\cos(wt) + i\sin(wt)\} = \boxed{L\{\cos(wt)\}} + \boxed{iL\{\sin(wt)\}}$$

$$\Rightarrow L\{\cos(wt)\} = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$\Rightarrow L\{\sin(wt)\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

第一移位定理：

若任意函數 $f(t)$ 具有轉換式 $F(s)$

則函數 $e^{at}f(t)$ 具有轉換式 $F(s-a)$

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

$$let\ \alpha=(s-a)$$

$$\Rightarrow F(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}e^{at}f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}[e^{at}f(t)]dt$$

$$=L\{e^{at}f(t)\}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

第一移位定理：

若任意函數 $f(t)$ 具有轉換式 $F(s)$

則函數 $e^{at}f(t)$ 具有轉換式 $F(s-a)$

試求$L\{e^{at}\cos(wt)\}$

$$\text{已知} L\{\cos(wt)\} = \frac{s}{s^2+w^2} = F(s)$$

$$L\{e^{at}\cos(wt)\} = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$$

p211

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

第一移位定理：

若任意函數 $f(t)$ 具有轉換式 $F(s)$

則函數 $e^{at}f(t)$ 具有轉換式 $F(s-a)$

$$L\{e^{at}\} = L\{e^{at}\times 1\}$$

已知$L\{1\} = \dfrac{1}{s} = F(s)$

p211

$$L\{e^{at}\times 1\} = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)}$$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質(續)

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

p211

拉普拉斯轉換的線性性質

令 任意函數 $f(t), g(t)$ 及任意常數 c_1, c_2

$$L\{c_1 f(t) \pm c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} \pm c_2 L\{g(t)\}$$

第一移位定理:

若任意函數 $f(t)$ 具有轉換式 $F(s)$

則函數 $e^{at} f(t)$ 具有轉換式 $F(s-a)$

拉普拉斯轉換、逆轉換、線性與移位性質

1.令 $f(t)=a$ 試求 $F(s)$

2.令 $f(t)=e^{5t}$ 試求 $F(s)$ p211

3.令 $f(t)=a+be^{-3t}$ 試求 $F(s)$

4. 令 $f(t)=t^2$,已知 $L\{t^2\}=\dfrac{2!}{s^3}$,試求 $L\{e^t t^2\}$

導數與積分的拉普拉斯轉換，微分方程式

定理 : $f(t)$ 之導數的拉普拉斯轉換

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$\int uv'dt = uv - \int u'vdt$$

$$\begin{aligned}
L\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \left[0 - f(0)\right] + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt - f(0) = sL\{f\} - f(0)
\end{aligned}$$

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

定理：$f(t)$ 之導數的拉普拉斯轉換

$$L\{f'\} = sL\{f\} - \boxed{f(0)}$$

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L(f) - \boxed{sf(0) - f'(0)}$$

$$\begin{aligned} L\{f'''\} &= sL\{f''\} - f''(0) = s\left[sL\{f'\} - f'(0)\right] - f''(0) \\ &= s^2L\{f'\} - sf'(0) - f''(0) \\ &= s^2\left[sL\{f\} - f(0)\right] - sf'(0) - f''(0) \\ &= s^3L\{f\} - \boxed{s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)} \end{aligned}$$

$$L\{f^{(n)}\} = s^nL\{f\} - \boxed{s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2 L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換：　$y' - y = 1, \boxed{y(0) = 1}$

$$L\{y' - y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{y'\}} - L\{y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{sL\{y\} - y(0)} - L\{y\} = \frac{1}{s} \Rightarrow (s-1)L\{y\} - \boxed{y(0)} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow (s-1)L\{y\} - \boxed{1} = \frac{1}{s} \Rightarrow (s-1)L\{y\} = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{s+1}{s} \times \frac{1}{s-1}$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換： $y'' - y = 1, \boxed{y(0) = 1, y'(0) = 2}$

$$L\{y'' - y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{y''\}} - L\{y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)} - L\{y\} = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 - 1)L\{y\} - \boxed{sy(0) - y'(0)} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 1)L\{y\}\boxed{-s-2} = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 - 1)L\{y\} = \frac{1}{s} + s + 2 = \frac{s^2 + 2s + 1}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s} \times \frac{1}{s^2 - 1}$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

令 $f(t) = t^2$, 試由 $L\{1\}$ 導出 $L\{f\}$

$$f(t) = t^2,\ f'(t) = 2t,\ f''(t) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0) = 0^2 = 0,\ f'(0) = 2\times 0 = 0}$$

$$L\{f''\} = L\{2\} = 2L\{1\} = \frac{2}{s}$$

$$L\{f''\} = s^2L\{f\} - \boxed{sf(0) - f'(0)} = s^2L\{f\}$$

$$\Rightarrow s^2L\{f\} = \frac{2}{s} \Rightarrow L\{f\} = \frac{2}{s^3} = L\{t^2\}$$

工數 導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

令 $f(t) = \cos wt$, 試導出 $L\{f\}$

$$f(t) = \cos wt,\ f'(t) = -w\sin wt,\ f''(t) = -w^2\cos wt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0) = \cos(0) = 1,\ f'(0) = -w\sin(0) = 0}$$

$$L\{f''\} = L\{-w^2\cos wt\} = -w^2L\{f\}$$

$$L\{f''\} = s^2L\{f\} - \boxed{sf(0) - f'(0)} = s^2L\{f\} - s$$

$$\Rightarrow s^2L\{f\} - s = -w^2L\{f\} \Rightarrow (s^2 + w^2)L\{f\} = s$$

$$\Rightarrow L\{f\} = \frac{s}{(s^2 + w^2)}$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換： $y' - y = e^{3t},\ y(0) = 1$

$$L\{y' - y\} = L\{e^{3t}\}$$

$$\Rightarrow L\{y'\} - L\{y\} = L\{e^{3t}\}$$

以 $Y(s)$ 代表 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換式

$$\Rightarrow sL\{y\} - y(0) - L\{y\} = \frac{1}{s-3} \Rightarrow (s-1)L\{y\} - y(0) = \frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow (s-1)Y(s) - 1 = \frac{1}{s-3} \Rightarrow (s-1)Y(s) = \frac{1}{s-3} + 1 = \frac{s-2}{s-3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s-2}{s-3} \times \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s-1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}\right\}$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換： $y'' - y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

$$L\{y'' - y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow L\{y''\} - L\{y\} = L\{1\}$$

以 $Y(s)$ 代表 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換式

$$\Rightarrow s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - L\{y\} = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2-1)Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2-1)Y(s) - s - 2 = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2-1)Y(s) = \frac{1}{s} + s + 2 = \frac{s^2+2s+1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s} \times \frac{1}{s^2-1} = \frac{(s+1)^2}{s} \times \frac{1}{s^2-1} = \frac{(s+1)}{s(s-1)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{s(s-1)}\right\}$$

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

微分方程式之拉氏轉換：　$y'' + ay' + by = r(t),\ y(0) = K_0,\ y'(0) = K_1$

以 Y/R 代表 y/r 的拉普拉斯轉換式

$$L\{y'' + ay' + by\} = L\{r(t)\}$$

步驟1

$$\Rightarrow [s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = R$$

$$\Rightarrow (s^2 + as + b)Y - (s + a)y(0) - y'(0) = R$$

$$\Rightarrow (s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R$$

步驟2

$$\Rightarrow Y = \frac{(s+a)y(0) + y'(0) + R}{s^2 + as + b}, \text{令 } Q = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$\Rightarrow Y = [(s+a)y(0) + y'(0)]Q + RQ$$

$$\text{若 } y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow Y = RQ \Rightarrow Q = \frac{Y}{R} = \frac{L(output)}{L(input)}$$

步驟3

$$y(t) = L^{-1}\{Y\}$$

工數 導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換： $y'' - y = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

以 Y 代表 y 的拉普拉斯轉換式

$$L\{y'' - y\} = L\{t\}$$

$$\Rightarrow L\{y''\} - L\{y\} = L\{t\}$$

$$\Rightarrow s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - L\{y\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2 - 1)Y - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 1)Y - s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2 - 1)Y = \frac{1}{s^2} + s + 1 = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2} \times \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 - 1)} = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$$

$$= \frac{1}{s - 1} + \left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\right)$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\right\} = e^t + \sinh t - t$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式（續）

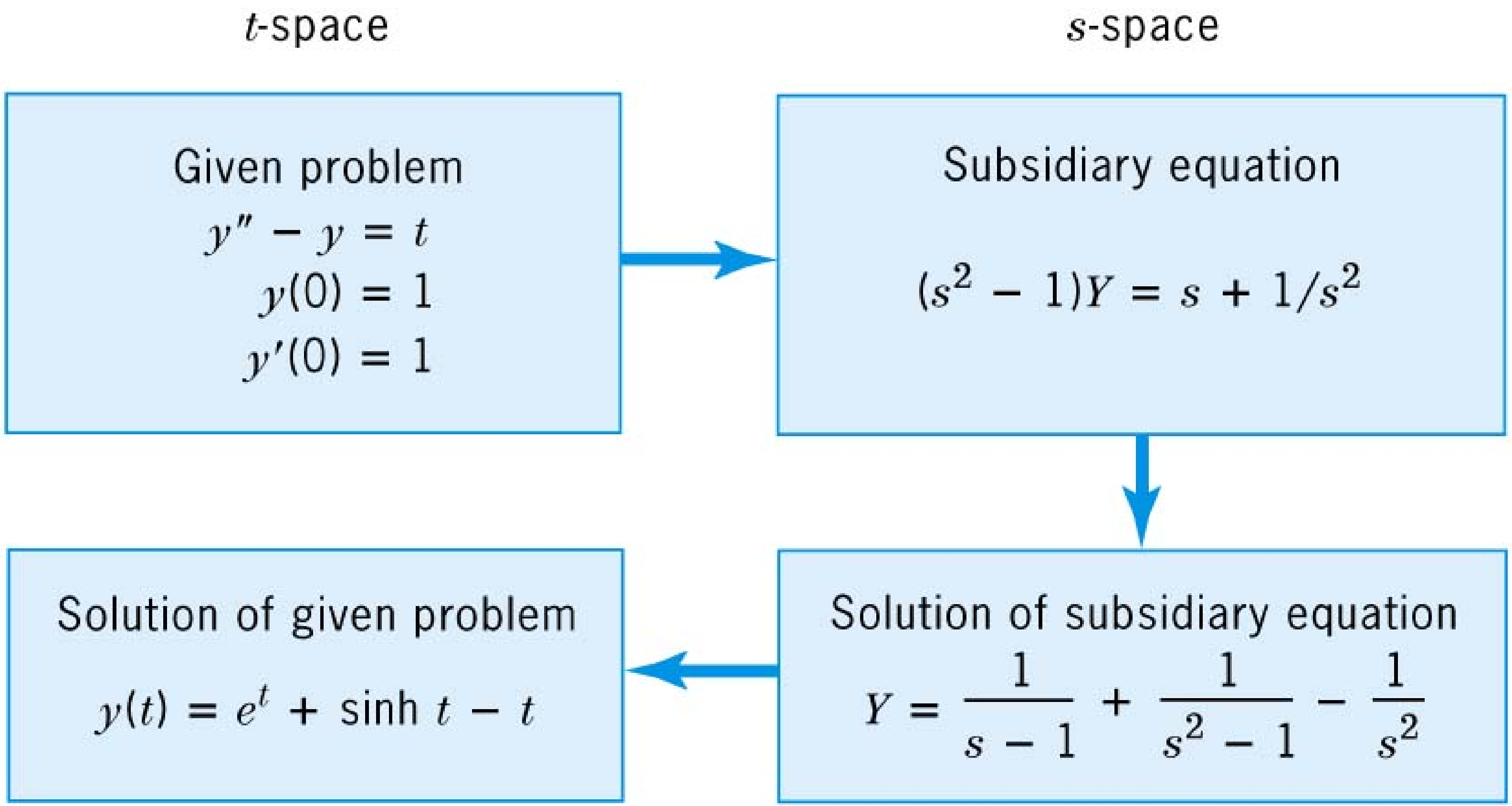

Fig. 108. Laplace transform method

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式

定理 : $f(t)$ 之積分的拉普拉斯轉換

令 $F(s)$ 代表 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換式

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式

定理：$f(t)$ 之積分的拉普拉斯轉換

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

令 $L\{f\} = \dfrac{1}{s^2}$，試求 $f(t)$

$L\{f\} = \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s}$，查表可得 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t 1 d\tau = \tau\Big|_0^t = t - 0 = t$$

$\therefore\ f(t) = t$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式

定理 : $f(t)$ 之積分的拉普拉斯轉換

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

令 $L\{f\} = \dfrac{1}{s(s^2+w^2)}$,試求 $f(t)$

$$L\{f\} = \frac{1}{s(s^2+w^2)} = \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+w^2)}, \text{查表可得 } L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+w^2)}\right\} = \frac{1}{w}\sin wt$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+w^2)}\right\} = \frac{1}{w}\int_0^t \sin w d\tau = \frac{1}{w^2}(1-\cos wt)$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{w^2}(1-\cos wt)$$

p211

導數與積分的拉普拉斯轉換式，微分方程式

定理 : $f(t)$ 之積分的拉普拉斯轉換

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

令 $L\{f\} = \dfrac{1}{s(s-a)}$，試求 $f(t)$

部分函數 $f(t)$ 及其拉普拉斯轉換式$\mathcal{L}(f)$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(t)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(t)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$
4	t^n $(n = 0, 1, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}$
5	t^a (a 為正值)	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s - a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\dfrac{1}{s - a}$	12	$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$